

VARIABLE ALEATORIA: UNA PROPUESTA BAJO LA MIRADA DE LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

RANDOM VARIABLE: A PROPOSAL FROM THE PERSPECTIVE OF THE THEORY OF DIDACTIC SITUATIONS

Manuel Alejandro Cuevas León, Carlos Andrés Ledezma Araya

Escuela de Negocios Internacionales de la Universidad de Valparaíso, Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
manuel.cuevas@uv.cl, carlos.ledezma.a@mail.pucv.cl

Resumen

Esta investigación tiene por objetivo validar una propuesta didáctica para el aprendizaje del concepto de Variable Aleatoria en estudiantes de segundo año medio (15-16 años). Para ello, se consideró como referente la Teoría de Situaciones Didácticas, enfocándose principalmente en las situaciones de Acción, Formulación y Validación. Se diseñó una secuencia didáctica de tres clases, y se implementó la primera de éstas, siguiendo la metodología del Estudio de Clases. Se clasificaron las producciones de los sujetos participantes de acuerdo a la presencia de las fases ya declaradas, y el análisis de los resultados evidenció las dificultades y errores que presentaron los estudiantes, además de obstáculos epistemológicos relacionados al aprendizaje del concepto.

Palabras clave: propuesta didáctica, teoría de situaciones didácticas, variable aleatoria

Abstract

The aim of this research is to validate a didactic proposal for the learning of Random Variable concept for high school second-year students (aged 15-16). The Theory of Didactic Situations was considered as a referent, mainly focused on Action, Formulation, and Validation situations. A didactic sequence made up of three lessons was designed and the first one was implemented, following the Lesson Study methodology. Students' performances were classified according to the phases previously mentioned. The analysis of the results showed difficulties and mistakes that students made, as well as some epistemological obstacles related to the learning of the concept.

Key words: didactic sequence, random variable, theory of didactic situations

■ Introducción

Desde la década de los 80 que se viene incorporando con fuerza en los currículos de matemática de diversos países el eje temático de probabilidades, siendo el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) el pionero en esta reforma (Vásquez y Alsina, 2014). En este contexto, Heitele (1975) propone que existen diez conceptos fundamentales a ser aprendidos por los estudiantes, entre los que se encuentra la Variable Aleatoria.

Los documentos curriculares chilenos sitúan el concepto de Variable Aleatoria en el nivel segundo año medio (estudiantes de 15-16 años). El Programa de Estudios –vigente hasta 2017– ubicaba este contenido en la unidad de Datos y Azar, de acuerdo al cuarto aprendizaje esperado que declaraba “comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios” (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2011, p. 85). Por su parte, las Bases Curriculares (MINEDUC, 2016a) –vigentes desde 2018– ubican este contenido en el eje Probabilidad y Estadística, de acuerdo con el décimo objetivo de aprendizaje que declara que los estudiantes deben “mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas: definiendo la variable; determinando los posibles valores de la incógnita; calculando su probabilidad; graficando sus distribuciones” (MINEDUC, 2016b, p. 154).

Como parte de este estudio, nos propusimos conocer la definición aportada desde el ‘saber sabio’ y compararla con la del ‘saber enseñado’ (véase Chevallard, 1985) sobre la Variable Aleatoria, ello con la intención de apropiarnos del conocimiento del objeto matemático de nuestro interés. Desde el punto de vista del ‘saber sabio’, nos adherimos a la definición de Variable Aleatoria que propone Shiryaev (2016) como una propiedad numérica de un experimento cuyo valor depende de la ‘posibilidad’, siendo de nuestro interés aquella del tipo discreta (véase Shiryaev, 2016, pp. 206-207). Desde la perspectiva del ‘saber enseñado’, consideramos la definición de Variable Aleatoria aportada por el texto escolar de distribución ministerial *Matemática 2º Medio Texto del Estudiante* (Muñoz, Jiménez y Rupin, 2013), en donde se presenta como “dado un experimento aleatorio cualquiera, se llama variable aleatoria (v.a.) a la función que, a cada suceso del espacio muestral (Ω) , le asigna un único número real $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ” (p. 281).

La diferencia entre ambas definiciones es evidente en los aspectos estructurales sobre los que cada una se cimenta. Mientras que la definición de Shiryaev (2016) tiene como base un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) y se complementa con funciones y conjuntos de Borel, la definición en Muñoz et al. (2013) se basa en la utilidad del concepto para modelizar un experimento aleatorio, relacionándola con la Función de Probabilidad que emerge de la Variable Aleatoria. No obstante, ambas definiciones se sustentan en los conceptos de espacio muestral (Ω) y función de variable real.

Para este estudio se consideró la propuesta curricular de MINEDUC (2011), ello debido a que era el documento curricular vigente al momento de su implementación (véase Cuevas, 2017). Sin embargo, debido a que nuestra investigación se encuentra actualmente en una fase ampliación y reformulación, nos es imperativo considerar la propuesta vigente de MINEDUC (2016a; 2016b) para esta segunda etapa.

Siendo este estudio una continuación al trabajo de Cuevas (2017), nuestro objetivo es validar, desde la Teoría de Situaciones Didácticas, una propuesta didáctica para el aprendizaje de la Variable Aleatoria en estudiantes de segundo año medio (15-16 años), planteándonos como preguntas de investigación ¿qué fases de la Teoría de Situaciones Didácticas se presentan en nuestra propuesta de aprendizaje para el objeto matemático Variable Aleatoria?, ¿cómo aporta esta propuesta al aprendizaje de la Variable Aleatoria en estudiantes de segundo año medio (15-16 años)?

■ Marco teórico

Nuestra investigación se enmarca en la Teoría de Situaciones Didácticas (en adelante TSD) (Brousseau, 2002), la cual se basa en el estudio del sistema didáctico que se sustenta en el triángulo epistemológico: *docente – saber matemático – alumno*, y en el conjunto de interacciones que entre éstos se suceden. La elección de este referente se relaciona con una de las intenciones de este estudio, la cual es contribuir –a partir de las herramientas didácticas que aporta la TSD– al diseño de una propuesta para el aprendizaje de la Variable Aleatoria.

En términos de Brousseau y Warfield (2014), una *Situación Didáctica* –en el ámbito de la matemática– se entiende como un proyecto que se organiza para provocar que un(os) estudiante(s) se apropie(n) de un fragmento de conocimiento matemático de referencia, constituyendo así un proceso donde el *docente* proporciona un *milieu* (medio didáctico) para que el *alumno* pueda construir su conocimiento (Brousseau, 2002). Dentro de este proceso se encuentra el de *Situación A-didáctica*, que en términos de Warfield (2014), se sucede cuando el *docente* no explicita a los estudiantes sus intenciones sobre enseñar un concepto específico, de manera tal que el *alumno* es capaz de trabajar sin su intervención, lo cual no significa que el *docente* adquiera un carácter de dispensable, sino que los estudiantes no son conscientes de sus intenciones.

Brousseau (2002) plantea la existencia de tres situaciones o fases, por parte de los estudiantes: a) la *Situación de Acción* es la fase en que el *alumno* trabaja en forma individual con un problema, es decir, actúa sobre el *milieu* (Warfield, 2014), para poder resolverlo a través del descubrimiento y la experimentación; b) la *Situación de Formulación (o de Comunicación)* es la fase en que el *alumno* trabaja con otros estudiantes para comunicar y compartir sus experiencias con el problema, provocando que un emisor formule un mensaje explícito a un receptor, para que este último lo comprenda y actúe sobre el *milieu* basado en dicho mensaje, de manera tal que el *alumno* tenga la necesidad de articular las ideas que –implícitamente– venía desarrollando desde la fase anterior (Warfield, 2014); c) la *Situación de Validación* es la fase en que dos *alumnos* (o dos grupos de) enuncian aseveraciones sobre el problema, y deben ponerse de acuerdo en cuanto a su veracidad o falsedad, siendo sometidas –desde otros pares– a cuestionamientos, aprobaciones, rechazos, contrastaciones, etc., que requieren del convencimiento –tanto propio como ajeno– de la validez de la idea que se está proponiendo (Warfield, 2014). Si bien las fases a), b) y c) se presentan de manera muy puntual y secuencial, es común que se superpongan unas a otras o que incluso se fusionen (Warfield, 2014).

Por parte del *docente*, Brousseau (2002) menciona dos situaciones que protagoniza: i) la *Situación de Devolución* es el acto en que el enseñante insta al *alumno* a comprometerse con la situación matemática que le ha planteado, de manera que la realice sin su ayuda explícita (Brousseau y Warfield, 2014), lo cual es comparable con una negociación entre ambos, donde el *alumno* debe asumir su responsabilidad en el proceso, pero sin desmerecer la autoridad del *docente* (Warfield, 2014); ii) la *Situación de Institucionalización* se sucede cuando el *docente* toma en consideración los elementos que emergieron durante las fases a), b) y c), para así establecer relaciones entre éstos y el saber cultural (Brousseau y Warfield, 2014), lo que implica una revisión, pulimiento y ordenación de las ideas para establecer un puente entre las producciones de la clase y los aspectos curriculares (Warfield, 2014).

■ Metodología

Nuestro estudio es de enfoque cualitativo y paradigma interpretativo, enmarcado en una investigación-acción del tipo práctica. En una primera etapa, se diseñó una secuencia didáctica de tres clases para el aprendizaje de la Variable Aleatoria (en adelante V.A.), cada una estructurada como una situación didáctica para estudiantes de segundo año medio. En este escrito presentamos los resultados de implementación sólo de la primera clase de la secuencia, la cual fue aplicada en dos cursos del nivel segundo año medio (paralelos A y B) de un establecimiento educacional de la ciudad de Viña del Mar (Chile), siguiendo la metodología del Estudio de Clases (Isoda y Olfos, 2009), lo cual implicó que el plan de clase se revisara y se hicieran las adecuaciones pertinentes luego de cada intervención.

Durante la fase de implementación del estudio, el Investigador 1 asumió el rol del *docente*, mientras que el Investigador 2 se encargó de la recolección de datos. Estas funciones se mantuvieron en las dos intervenciones que aquí se presentan y analizan. Por otra parte, el contexto curricular en que se llevó a cabo la fase de implementación fue durante el desarrollo de la unidad de Datos y Azar (véase MINEDUC, 2011), y se consideran como prerrequisitos los conceptos de conjunto (y representación en diagrama sagital), relación, experimento, principio multiplicativo, regla aditiva, función (dominio, codominio y recorrido; representación en registros tabular, gráfico y de diagrama sagital), Regla de Laplace, y espacio muestral (asociado a un experimento aleatorio).

Para la situación didáctica diseñada, cuya duración aproximada es de máximo 90 minutos, el *docente* solicitó a los estudiantes leer –en forma individual– la actividad (véase Figura 14) que a cada uno se le entregó, y luego conformar grupos de 4 o 5 integrantes para discutir el problema y lograr un consenso que dé respuesta al mismo. El diseño de la actividad es producto de la adaptación de un ejercicio de Ruiz (2014).

Bingo del Día del Alumno

A raíz de los festejos del Día del Alumno, el profesor del taller de cine del Colegio Sol Naciente desea conocer el número de estudiantes que tiene cada uno de los 30 apoderados en el taller, por lo cual solicita la información a la secretaria del establecimiento. Los datos que le entregó fueron los siguientes:

Número de estudiantes	1	2	3	4
Número de apoderados	8	13	7	2

La intención es realizar un bingo que beneficie a los alumnos, por lo que se asignará a cada apoderado un boleto. En la celebración del Día del Alumno se efectuará el sorteo y se premiará a los estudiantes de un apoderado con entradas para el cine, las cuales se deben comprar con anticipación, pues están con un descuento especial sólo por 24 horas. Bajo estas condiciones, el profesor debe decidir cuántas tiene que comprar, a fin de abaratar costos.

Dados los conjuntos A , B y C definidos por:

A : el conjunto de 30 apoderados del taller.

B : el conjunto de cantidad de estudiantes.

C : el conjunto de posible ocurrencia de cada situación.

Defina y represente la relación entre A y B , y entre B y C .

Figura 14. Actividad desarrollada por los estudiantes. Adaptada desde Ruiz (2014, p. 214)

El objetivo de esta clase es que los estudiantes comprendan el concepto de V.A., sin embargo, en el momento de inicio sólo se declara que se va a resolver un problema de probabilidades, esto para evitar conclusiones apriorísticas por parte de los sujetos participantes. Si bien el objeto basal de la situación didáctica es la V.A., también se desprende el concepto de Función de Probabilidad (en adelante F.P.). La clase finaliza con la exposición de los distintos grupos sobre sus respuestas a la actividad, posterior a lo cual el *docente* realiza la *Situación de Institucionalización* del objeto matemático que se pretende introducir.

Para el desarrollo de esta actividad, se espera que los estudiantes establezcan una relación entre los conjuntos A y B , donde sus elementos son:

- A : los apoderados que tienen uno (a_1), dos (a_2), tres (a_3) y cuatro estudiantes (a_4) inscritos en el taller.
- B : la condición de tener uno (1), dos (2), tres (3) o cuatro (4) estudiantes inscritos en el taller.

Luego, se espera que establezcan una relación entre los conjuntos B y C , donde este último corresponde a la probabilidad de que un apoderado a_n con n estudiantes inscritos en el taller sea seleccionado. De este modo, la relación $A \rightarrow B$ representa una V.A., y la relación $B \rightarrow C$ una F.P., lo cual se explicita por el *docente* durante la *Situación de Institucionalización*.

La Figura 15 muestra la representación a través de conjuntos que se considera como respuesta esperada al desafío planteado a los estudiantes.

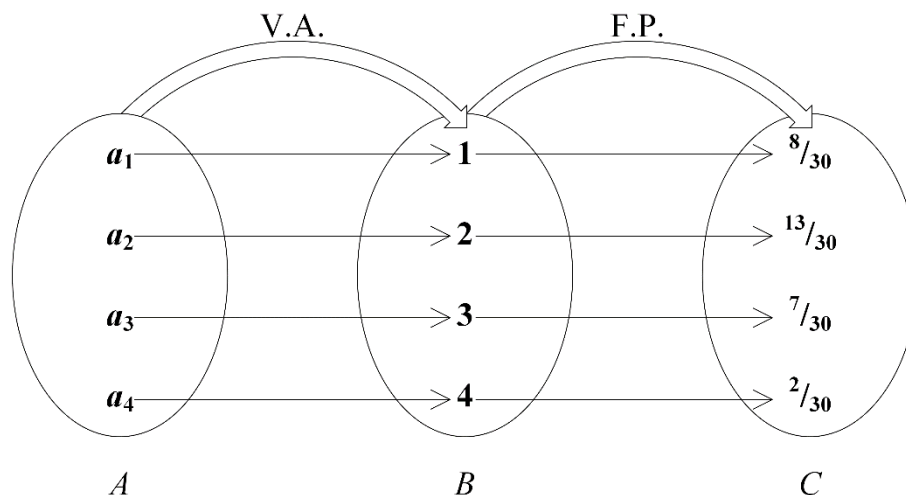


Figura 15. Respuesta esperada para la actividad. Adaptada desde Cuevas (2017, p. 25).

La Tabla 3 muestra la clasificación y rotulación de los grupos de estudiantes que participaron durante la fase de implementación, de acuerdo con la intervención en que se aplicó la clase.

Tabla 3. Clasificación y rotulación de los grupos de estudiantes por intervención.

Intervención / Curso	Rótulos de los grupos	Rótulos de los estudiantes
Primera intervención / Curso A	G1A	E1A a E5A
	G2A	E6A a E10A
	G3A	E11A a E15A
	G4A	E16A a E20A
Segunda intervención / Curso B	G1B	E1B a E5B
	G2B	E6B a E10B
	G3B	E11B a E15B
	G4B	E16B a E20B
	G5B	E21B a E25B

NOTA. Curso A: Segundo Medio Paralelo A; Curso B: Segundo Medio Paralelo B.

Para esta investigación se utilizaron dos técnicas de recolección de datos durante la fase de implementación del estudio, descritas en la Tabla 4.

Tabla 4. Técnicas de recogida de datos para el estudio.

Técnica	Descripción
Registro escrito	<ul style="list-style-type: none"> – Actividad ‘Bingo del Día del Alumno’, la cual desarrollaron los grupos de estudiantes en cada intervención, registrando sus procedimientos y respuestas en hojas de cuaderno. – Representación de los conjuntos en cartulinas, que utilizaron los grupos de estudiantes para presentar sus respuestas finales ante el curso.
Registro audiovisual	<ul style="list-style-type: none"> – Grabación en video del trabajo de los grupos de estudiantes durante las intervenciones y de la presentación de sus respuestas frente al curso.

Se diseñaron categorías de análisis para las situaciones de *Acción* y *Formulación*, cuyos descriptores asociados corresponden a indicadores de logro para dar respuesta al desafío propuesto (véase Tabla 5), de acuerdo con un análisis a priori de posibles estrategias que los estudiantes podrían seguir para concretar la actividad. No obstante, la situación de *Validación* se encuentra supeditada por los argumentos que declaren los estudiantes al momento de presentar sus respuestas ante el curso.

Tabla 5. Categorías de análisis para las situaciones de *Acción* y *Formulación*, y sus descriptores asociados.

Fases de la TSD	Categorías de análisis	Subcategorías de análisis	Descriptores
<i>Acción</i>	C ₁ : Identificación de los conjuntos y de sus elementos.	C _{1.1} : Identificación de los elementos de 1 o 2 de los conjuntos.	Extraen información del enunciado de la actividad sobre los diferentes conjuntos (apoderados y estudiantes) y sus elementos.
		C _{1.2} : Identificación de los elementos de los 3 conjuntos	
	C ₂ : Representación* de los elementos de cada conjunto.	C _{2.1} : Representación de los elementos de 1 o 2 de los conjuntos.	Identifican los elementos de cada conjunto y los representan.
		C _{2.2} : Representación de los elementos de los 3 conjuntos.	
	C ₃ : Representación de los conjuntos en diagramas disjuntos y no-disjuntos.	C _{3.1} : Representación de 1 o 2 conjuntos en diagramas.	Representan en un conjunto a los apoderados, en otro al número de estudiantes por apoderado, y en otro el nivel de ocurrencia de la situación.
		C _{3.2} : Representación de los 3 conjuntos en diagramas.	

<i>Formulación</i>	C ₄ : Relación de los elementos del conjunto <i>A</i> con los del conjunto <i>B</i> .		Relacionan la pre-imagen del conjunto <i>A</i> con su imagen en el conjunto <i>B</i> .
	C ₅ : Relación de los elementos del conjunto <i>B</i> con los del conjunto <i>C</i> .		Relacionan la pre-imagen del conjunto <i>B</i> con su imagen en el conjunto <i>C</i> .
	C ₆ : Representación de los conjuntos en diagramas sagitales; reconocimiento de la relación $A \rightarrow B \rightarrow C$.		Representan los conjuntos <i>A</i> , <i>B</i> y <i>C</i> en diagramas sagitales; reconocen la relación $A \rightarrow B \rightarrow C$.

* La representación de los elementos de los conjuntos se encuentra supeditada a la respuesta esperada definida en la Figura 15.

Para el análisis de los resultados, se clasificaron las producciones escritas de los estudiantes de acuerdo a las situaciones de *Acción* y *Formulación* que evidenciaron los distintos grupos; los registros de las presentaciones finales permitirán el análisis de la situación de *Validación*; y los registros audiovisuales complementarán la discusión de resultados en general.

Este trabajo fue desarrollado como parte del programa de Magíster en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, donde se validó el estudio por expertos de didáctica.

■ Resultados

Para efectos de presentación y análisis de los resultados, se muestran algunos momentos representativos de las intervenciones llevadas a cabo, en las cuales se evidencian las fases de *Acción* y *Formulación* por las que transitaron los estudiantes mientras desarrollaban la actividad propuesta. Los extractos que se presentan a continuación incluyen parte de la transcripción de los diálogos y –en algunos casos– la captura de video asociada.

Sobre la primera intervención, en el siguiente extracto se presenta una discusión del G3A durante la fase de *Acción*.

E11A: Si hay 13 [señalando la tabla de la actividad], significa que hay 2, 2, 2, ... [alumnos], así. Hay más de 30 [alumnos].

E12A: Eh, no [dubitativa].

E13A: No, hay 10 [sumando el par (3,7)], acá son 6 [sumando el par (4,2)].

E14A: Pero, está bien, porque ella [E11A] dice que, si ahí [señalando la tabla de la actividad] hay 8 apoderados, y que 8 personas tienen un hijo, entonces ahí son 8 hijos.

E11A: Sí, son 8 [...]. Acá hay 13 [señalando la tabla de la actividad], entonces, si hay 13 personas, cada persona tiene 2 hijos, no son...

E15A: Son 26 [hijos].

E11A: Si hay 7 [señalando la tabla de la actividad].

E15A: Son 21 [hijos].

La suposición inicial del grupo era incierta con respecto a qué representaban los valores de la tabla, pues mientras que la E11A declaraba que la primera entrada indica el número de hijos que tienen cada uno de los apoderados de la segunda entrada, la E13A suponía que el número de hijos estaba dado por la suma –en sentido vertical– de los valores de la primera entrada con los de la segunda. Ello evidencia una dificultad, por parte de la E13A, con la noción de relación entre variables, y una tendencia a considerar la primera entrada de una tabla como la variable

independiente, sin importar el contexto en que esté inserta la tabla. Por su parte, la E14A dio soporte a la idea de la E11A, y la complementó con el cálculo necesario para obtener el número total de estudiantes del taller que, aunque no es un dato determinante para resolver la situación, da luces tanto de una comprensión de las variables involucradas en la situación, como de los conjuntos y sus elementos constitutivos.

La Tabla 6 muestra un diálogo entre el G2A y el *docente* (D) durante la fase de *Formulación*.

Transcripción del diálogo

E6A: Acá [señalando el conjunto C] tenemos la probabilidad de que un solo alumno gane una entrada.

E8A: No, acá [señalando el conjunto B] tenemos el conjunto de los apoderados que tienen 1 estudiante, el que tiene 2 [...]. Éste [señalando el conjunto A] es el conjunto de los estudiantes del taller.

D: Ya, y éste [señalando el conjunto C] ¿qué es?

E6A: Ésta es la relación que tienen los 30 apoderados por separado, es decir, la probabilidad de que el ganador salga entre los 8, entre los 13, entre los 7 o entre los 2, pero que salgan uno de entre estos 8.

Captura del registro audiovisual

Texto en la imagen:

1	←	8	8/30
2	←	13	13/30
3	←	7	7/30
4	←	2	2/30

$A = \{30\}; B = \{63\};$

$C = \{8/30, 13/30, 7/30, 2/30\}$

Durante la clase, el *docente* interactuó con el grupo tras notar que, si bien tenían claridad sobre los elementos que conformaban cada conjunto, estaban confundidos en cuanto a su representación y posterior relación. Esta dificultad llevó al error de escribir los conjuntos A y B de dos maneras diferentes: según la representación de sus elementos ($\{1, 2, 3, 4\}$ y $\{8, 13, 7, 2\}$), y como el total de elementos de cada uno ($\{30\}$ y $\{63\}$); sin embargo, el conjunto C fue el único que representaron de una única manera. La relación que explicaron se podría interpretar como $B \leftarrow A$, dejando al conjunto C —presumiblemente— relacionado con A , de acuerdo con la forma en que los representaron.

Sobre la segunda intervención, en el siguiente extracto se presenta un diálogo entre el G1B y el *docente* (D) durante la fase de *Acción*.

E1B: Tenemos 3 grupos [sic], A , B y C . Éste [señalando el conjunto A] se relaciona con éste [señalando al conjunto B].

D: ¿Cuáles son los elementos del conjunto A ?

E2B: Son los 30 apoderados del taller.

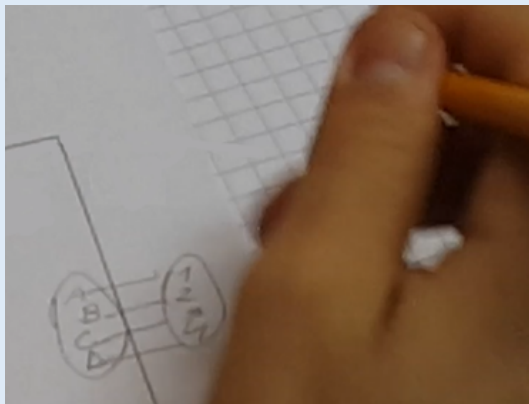
E1B: 8, 13, 7, 2.

D: ¿Y cuáles son los elementos del conjunto B ?

E1B: ¡Ah!, en el conjunto A hay que poner los números así [los escribe]: 8, 13, 7 y 2. Después acá [señalando el conjunto B], hay que poner 1, 2, 3, 4, y después acá [señalando el conjunto C] se debe colocar la suma de los estudiantes.

En esta intervención el *docente* interactuó con todos los grupos de estudiantes durante la fase de *Acción*, ello con la intención de que le explicasen cómo identificaron los conjuntos y sus respectivos elementos. El caso del G1B es que, si bien lograron identificar los conjuntos A y B , cometieron un error común a los demás grupos que fue el de escribir la cardinalidad del conjunto A como sus elementos, es decir, definir $A = \{8, 13, 7, 2\}$. Otro error fue suponer que los elementos del conjunto C eran valores obtenidos a partir de una suma de elementos de los conjuntos A y B , donde el último elemento de C debía ser igual al total de estudiantes de la situación, es decir, como una frecuencia acumulada.

La Tabla 7 presenta un diálogo del G3B durante la fase de *Formulación*.

Transcripción del diálogo	Captura del registro audiovisual
<p>E12B: ¿Cómo podemos representar la relación de los distintos conjuntos?</p> <p>E15B: Es que éstos [señalando el conjunto B] dependen del conjunto A... ¡ah!, o sea, esto sería a, b, c, d.</p> <p>E12B: Ya [dubitativo].</p> <p>E15B: Sí, y acá se ponen como los estudiantes.</p> <p>E12B: ¿Cuál?</p> <p>E15B: Sería como, este apoderado a tenía un estudiante.</p> <p>E12B: Ya [dubitativo].</p> <p>E15B: El otro [apoderado] sería b tenía 2 estudiantes, c tenía 3 estudiantes y d tenía 4 estudiantes [señala las relaciones entre los elementos].</p> <p>E12B: Pero, ¿cuál es la relación?</p> <p>E15B: ¡Ahí está!, a es 1, b es 2, c es 3 y d es 4.</p>	

El E12B explica su idea al E15B sobre cómo nombrar los elementos del conjunto A , y luego relacionarlos a los del conjunto B . Los estudiantes lograron representar al conjunto de los apoderados como $A = \{A, B, C, D\}$ y al de los alumnos del taller como $B = \{1, 2, 3, 4\}$, estableciendo una relación entre éstos, sin embargo, su error estuvo en la relación $B \rightarrow C$, pues asociaron todos los elementos de B con el 30, definido como el único elemento de C . Para sintetizar los resultados obtenidos de la fase de implementación, la Tabla 6 muestra una clasificación de los grupos de estudiantes de acuerdo con las categorías y subcategorías en que se evidenciaron sus producciones.

Tabla 6. Síntesis global de los resultados del estudio.

Fases	Categorías	Subcategorías	Grupos
Acción	C ₁	C _{1.1}	G2A, G3A, G4A G1B, G2B, G5B
		C _{1.2}	G1A G3B, G4B
	C ₂	C _{2.1}	G2A, G3A, G4A G1B, G2B, G5B

		C _{2.2}	G1A G4B
	C ₃	C _{3.1}	G3A, G4A G3B
		C _{3.2}	G1A G2B
Formulación	C ₄		G1A, G3A G2B, G3B, G4B, G5B
	C ₅		G1A G2B
	C ₆		G1A G2B

En términos generales, en la segunda intervención se registraron mejores resultados en cuanto al establecimiento de relaciones entre los conjuntos A y B que en la primera, ello debido también a que se revisó el plan de clase implementado antes de volver a aplicarlo, y se adecuaron las *devoluciones* que realizaba el *docente* a los *alumnos* durante el desarrollo de la actividad. Lo anterior, que se encuentra en consonancia con la metodología del Estudio de Clases, permitió otorgarle a nuestra propuesta un carácter de perfectible.

Para la situación de *Validación* se solicitó a los estudiantes presentar sus procedimientos ante el curso utilizando la cartulina que se les entregó. A continuación, se presentan algunas producciones relevantes (véase

Figura 16 y

Figura 17) de cada intervención.

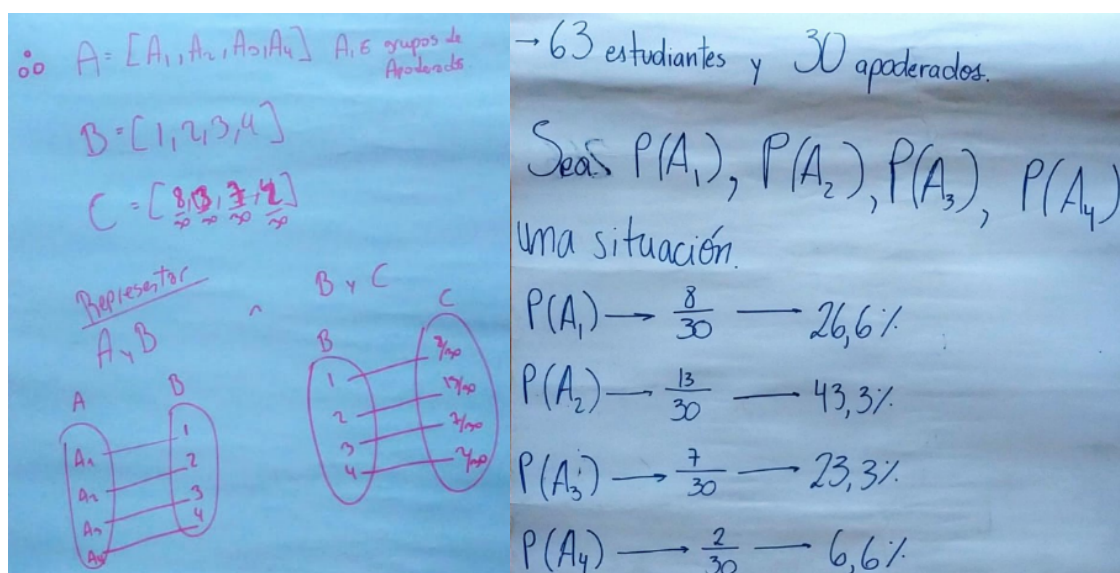


Figura 16. Evidencias de la fase de *Validación* en la primera intervención: G1A (izquierda) y G4A (derecha).

Con respecto a la primera intervención, el G1A estableció una relación congruente con la esperada para este problema, aunque la representaron de manera que $A \rightarrow B$ y $B \rightarrow C$ se encuentran visualmente aislados, más se subentiende que –al no variar la representación del conjunto B – sí lograron establecer la relación entre los tres conjuntos. El G4A, en cambio, recurrió a valores que, para la resolución del problema, eran irrelevantes. Su producción final evidenció que calcularon las probabilidades de ocurrencia de cada evento de manera individual, es decir, sin que formasen parte de un conjunto, razón por la cual no consideraron la representación de diagramas sagitales como se esperaba.

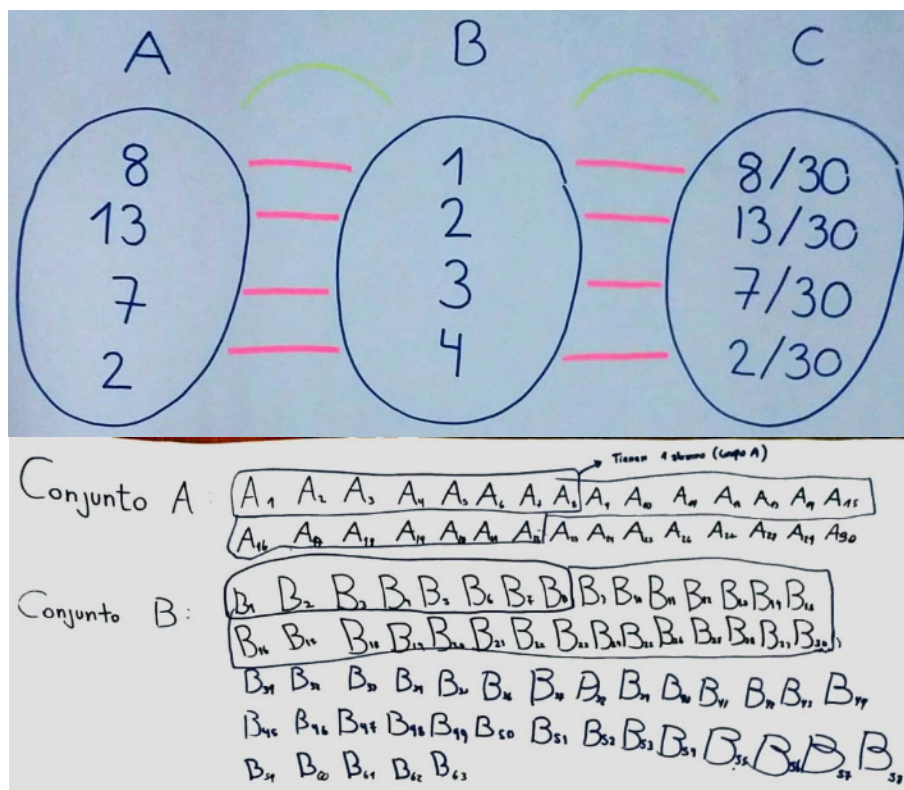


Figura 17. Evidencias de la fase de *Validación* en la segunda intervención: G2B (arriba) y G1B (abajo).

Con respecto a la segunda intervención, el G2B también logró un resultado cercano al esperado para el problema, aunque representaron los elementos del conjunto *A* como cardinalidades individuales de apoderados. El G1B, por el contrario, fue el único grupo de ambas intervenciones que representó los conjuntos *A* y *B* por extensión, cuya producción evidenció que lograron agrupar elementos, pero no así relacionarlos. En el conjunto *A*, agruparon los elementos *A*₁-*A*₈ definiéndolos como el ‘grupo A’ que ‘tiene 1 alumno’, pero no existe una relación explícita entre este conjunto y el *B* de los alumnos. Al momento de exponer sus resultados, no expresaron claridad en sus argumentos y declararon ‘agrupamos de acuerdo con lo que la actividad nos entregaba’ [sic].

Posterior a las presentaciones de ambas intervenciones, el *docente* realizó la *Situación de Institucionalización*, tomando las ideas de los estudiantes y relacionándolas con la V.A.

■ Conclusiones

La propuesta didáctica que diseñamos se aplicó a estudiantes del nivel segundo año medio (15-16 años) con el objetivo de validarla como un aporte a la enseñanza de la V.A. Con base en los resultados obtenidos de las implementaciones, se lograron evidenciar las dificultades a las que se enfrentan y los errores que cometen los estudiantes al trabajar con este objeto matemático, e incluso la presencia de un obstáculo epistemológico reportado por Ruiz (2014), sobre la dificultad para identificar la V.A. involucrada en un enunciado. Los estudiantes tuvieron dificultades para considerar la V.A. como una función que sirve como base para comprender el concepto de F.P., pues la mayoría de las producciones evidenciaron que la consideraban sólo como una magnitud y, al mismo tiempo, generaron una necesidad de efectuar cálculos para obtener resultados (cantidad total de alumnos en el taller, porcentajes, frecuencias acumuladas, etc.) que no eran relevantes para resolver la actividad. Desde la perspectiva

de la TSD (Brousseau, 2002), la dinámica de la clase permitió a los grupos ir transitando por las *Situaciones de Acción y Formulación* de manera no-lineal y cíclica, es decir, en la interacción e intercambio de ideas entre pares, se formaban acuerdos o discusiones que permitían cuestionar la forma de resolver el problema que se les planteó. Por su parte, la *Situación de Validación* les permitió expresar y defender sus ideas frente al curso cuando presentaron sus resultados finales, las cuales fueron consideradas por el *Docente* en el momento de efectuar la *Institucionalización* del contenido matemático.

Desde el año 2018 que esta propuesta se implementa para introducir los conceptos de V.A. y F.P. en el establecimiento en que se aplicó, lo cual permite dar continuidad a nuestra investigación y aportar a la enseñanza de la matemática escolar.

■ Referencias bibliográficas

- Brousseau, G. (2002). Theory of Didactical Situations in Mathematics. *Didactique des Mathématiques, 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield, Trans.). Nueva York, EE.UU.: Kluwer Academic Publishers. doi:10.1007/0-306-47211-2
- Brousseau, G. y Warfield, V. (2014). Didactic Situations in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 163-170). Dordrecht, Países Bajos: Springer. doi:10.1007/978-94-007-4978-8_47
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.
- Cuevas, M. (2017). Variable Aleatoria: una secuencia didáctica, bajo la mirada de la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (Tesis de magister). Recuperado desde Catálogo Bibliográfico de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (http://opac.pucv.cl/pucv_txt/txt-2500/UCC2556_01.pdf)
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6(2), 187-205. doi:10.1007/bf00302543
- Isoda, M. y Olfos, R. (2009). *El Enfoque de Resolución de Problemas: en la Enseñanza de la Matemática a partir del Estudio de Clases*. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Ministerio de Educación de Chile. (2011). *Matemática: Programa de Estudio para Segundo Año Medio*. Santiago, Chile: Autor.
- Ministerio de Educación de Chile. (2016a). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Santiago, Chile: Autor.
- Ministerio de Educación de Chile. (2016b). *Programa de Estudio Segundo medio*. Santiago, Chile: Autor.
- Muñoz, G., Jiménez, L. y Rupin, P. (2013). *Matemática 2° Medio Texto del Estudiante*. Providencia, Chile: Ediciones SM Chile.
- Ruiz, B. (2014). *Análisis epistemológico de la variable aleatoria y comprensión de objetos matemáticos relacionados por estudiantes universitarios* (Tesis doctoral). Recuperado desde Repositorio Institucional de la Universidad de Granada. (<http://hdl.handle.net/10481/31706>)
- Shiryaev, A. N. (2016). *Probability-1* (R. P. Boas y D. M. Chibisov, Trans.) (3ra ed.). Nueva York, EE.UU.: Springer. doi:10.1007/978-0-387-72206-1
- Vásquez, C. y Alsina, Á. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *NÚMEROS: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 85, 5-23.
- Warfield, V. M. (2014). *Invitation to Didactique*. Nueva York, EE.UU.: Springer. doi:10.1007/978-1-4614-8199-7